

B-Spline Kurven in der Anwendung – Zwei Beispiele

Andrea Frei^a, Susanne Harms^b, Regina Schikora^c

^aIMSGear GmbH, Donaueschingen, Germany
e-mail: andrea.frei@IMSGEAR.com

^b Department of Surveying, Computer Science and Mathematics, Stuttgart University of Applied Sciences, Germany
e-mail: susanne.harms@hft-stuttgart.de

^c T-Systems ITS GmbH, Leinfelden-Echterdingen, Germany
e-mail: Regina.Schikora@t-systems.com

Abstract

Two practical examples of the usage of B-spline Curves will be shown. The motivation of this applications was to analyse, if and how it is possible to use algebraic and geometric properties for the design of curves.

The topic of the first example is the transition of CAD-data into FEM-data. In doing so, we have to calculate points on Bézier Curves in equal distances. It will be researched whether the usage of ph-Curves improves the performance.

The topic of the second example is the calculation of the required space for a vehicle passing through a railtrack. For that an geometric motivated interpolation method for the calculation of a B-spline Curve with nearly unit speed will be developed.

Categories and Subject Descriptors: I.3.5 [Computer Graphics]: Computational Geometry and Object Modeling

Key Words and Phrases: B-spline Curves, ph-Curves, arc length, curve interpolation

1. Einführung

Eine häufig in CAD-Systemen verwendete Darstellung für Raumkurven ist die B-Spline-Darstellung. Der zu speichernde Datensatz umfasst die Ordnung k der verwendeten Basis-funktionen, die Steuerpunkte, sogenannte de-Boor-Punkte, und einen Knotenvektor, in dem Parameterwerte angegeben werden. Zur Definition und

Beschreibung der Eigenschaften der B-Spline Kurven sei auf [9] verwiesen. Ein Spezialfall der B-Spline Kurve ist eine Bézier-Kurve, die z.B. in [3] umfassend behandelt wird. Viele Algorithmen benutzen die Bézier-Darstellung, denn es lassen sich sehr effiziente, numerisch stabile Programme entwickeln.

In unseren Beispielen betrachten wir speziell die Bogenlänge einer Bézier- bzw. B-Spline-Kurve, zu deren näherungsweise Berechnung es rein numerische Verfahren gibt. Wir wollen untersuchen, wie sich algebraische bzw. geometrische Eigenschaften der Kurve bzw. deren Parameterdarstellung ausnutzen lassen. Im ersten Beispiel werden algebraische Eigenschaften berücksichtigt. Im zweiten Beispiel wird untersucht, ob sich geometrische Eigenschaften wie Krümmung in einem Interpolationsverfahren berücksichtigen lassen, wenn ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Steuerpunkte entstehen soll.

2. Aufwandsabschätzung beim Einsatz von ph-Kurven zur Berechnung äquidistant verteilter Punkte auf Kurven

Beim Berechnen von Finite-Elemente-Netzen werden Punkte (Knoten) gesucht, die möglichst gleichabständig auf berandeten Flächen verteilt sind, da die Elemente näherungsweise die Form von Quadraten oder gleichseitigen Dreiecken haben sollen. Wir betrachten die Berechnung dieser Knoten auf den Randlinien. Sie erfolgt numerisch, da hierzu die Bogenlänge der Kurven benötigt wird, und ist deshalb mit einem gewissen Zeitaufwand und Rundungsfehlern belastet. Die so genannten ph-Kurven scheinen eine gute Lösungsalternative für dieses Problem darzustellen. Integrale ph-Kurven zeichnen sich nämlich dadurch aus, dass ihre Bogenlängenfunktion ein Polynom ist. Die Berechnung eines Parameterwertes t , für den $s(t)$ einen bestimmten vorgegebenen Wert ΔS annimmt, kann auf einfachere Weise, beispielsweise mit Hilfe des Newton-Verfahrens, realisiert werden.

Zentrales Thema von [10] war daher die Zusammenstellung und Untersuchung vorhandener sowie die Entwicklung eigener Interpolationsverfahren von integralen, räumlichen ph-Kurven, um den beim Ersetzen eines Bézier-Splines durch ph-Kurven entstehenden Aufwand abzuschätzen. Ersetzen meint hier immer, dass Kurve und approximierende ph-Kurve stets Anfangs- und Endpunkt und Anfangs- und Endtangente gemeinsam haben, also eine G1- Interpolation vorliegt. Dabei wurde untersucht, ob sich die bekannten guten Ergebnisse für ebene ph-Kurven (siehe z.B. [4]) auf räumliche Kurven übertragen lassen.

2.1. Integrale ph-Raumkurven

Definition 2.1. Gegeben ist eine Raumkurve mit der Parameterdarstellung

$$c \dots \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, t \in I \text{ und dem Hodographen } \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}}$$

c ist eine integrale ph-Raumkurve, wenn ihre Ableitung der pythagoreischen Bedingung $\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t) = \sigma^2(t)$ genügt, wobei $\sigma(t)$ ein Polynom ist.

Folgerung 2.1. Die Bogenlänge einer ph-Kurve berechnet sich dann mittels

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)} dt = \int_{t_0}^t \sigma(t) dt.$$

Um Polynome mit dieser Eigenschaft zu finden, betrachten wir die stereographische Projektion:

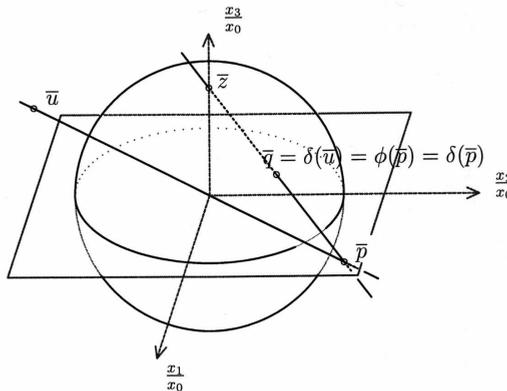


Abbildung 1: Verallgemeinerte stereographische Projektion

Lässt man zur Projektion nicht nur Punkte der Äquatorebene zu, kann man zeigen, dass alle Punkte einer Geraden auf einen Kugelpunkt abgebildet werden. Daraus lässt sich eine Formel für die verallgemeinerte stereographische Projektion herleiten. Wendet man diese Verallgemeinerung auf Polynome an, lässt sich folgender Satz zur Charakterisierung der Koordinatenfunktionen von ph-Kurven ableiten (Die Beschreibung der verallgemeinerten stereographischen Projektion, Herleitung und Beweis dieses Satzes findet man ausführlich in [1].):

Satz 2.1. Wenn die teilerfremden Polynome x_0, x_1, x_2, x_3 die Bedingung $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ erfüllen, dann existieren Polynome u, v, p, q , mit

$$\begin{pmatrix} \pm x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} q \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 + p^2 + q^2 \\ 2(uq - vp) \\ 2(up + vq) \\ u^2 + v^2 - (p^2 + q^2) \end{pmatrix}$$

Folgerung 2.2. Die ph- Bézierkurve hat dann die Parameterdarstellung

$$\underline{x}(t) = \underline{b}_0 + \int_0^t L(\tau) \begin{pmatrix} 2uq - 2vp \\ 2up + vq \\ u^2 + v^2 - p^2 + q^2 \end{pmatrix} d\tau = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \underline{b}_i, \quad t \in [0, 1]$$

\underline{b}_0 ist Anfangspunkt der Kurve. Die Kurve ist vom Grad $n = 1 + k + 2m$, k ist der Grad von $L(t)$, m höchster Grad der Polynome u, v, p und q . Um ph-Kurven in Bézier-Form zu erhalten, setzt man die Polynome in Bernstein-Form an.

Für die Praxis wesentlich sind ph-Kurven ungeraden Grades, da Interpolationsbedingungen im Anfangs- und Endpunkt gleichermaßen erfüllt werden sollen. Speziell benutzt man ph-Kurven dritten und fünften Grades, da ph-Kurven niedrigeren Grades immer Strecken sind und ph-Kurven höheren Grades auf zu komplizierte Gleichungen führen.

2.2. ph - Kubiken

Um ph-Kubiken zu erhalten, werden Polynome $u(t), v(t), p(t), q(t)$ vom Grad eins benutzt und $L(t) \equiv 1$ gesetzt. In [10] wurde ein alternativer Ansatz zur G^1 -Interpolation von Jüttler und Mäurer [7] entwickelt, bei dem freie Parameter geometrisch interpretiert werden können. Diese Interpolationen benutzen ein spezielles lokales Koordinatensystem. In Abhängigkeit von den Interpolationsdaten erhält man keine, eine oder zwei Interpolationskurven. Nachteilig für die praktische Anwendung ist hier die Umrechnung in ein lokales Koordinatensystem nebst notwendiger Rückrechnung, die Bewertung der Güte der erhaltenen Kurve, die Auswahl der besseren Kurve bei zwei Lösungen sowie evtl. notwendige Unterteilungen und Neuberechnung.

2.3. ph - Quintiken

Es gibt zwei relevante Möglichkeiten, eine ph-Quintik zu erhalten:

1. Möglichkeit: $m = 1, k = 2$

In [10] wird eine C^1 -Interpolation hergeleitet, die ein lokales Koordinatensystem benutzt und keine bis maximal vier Interpolationskurven erzeugt. Bei dieser Interpolation erhält man zu mehr Ausgangsdaten Interpolationskurven als bei der Kubik. Die Methode hat aber den Nachteil, dass eine ganze Reihe von Sonderfällen behandelt werden müssen.

1. Möglichkeit: $m = 2, k = 0$

Zwei Sonderfälle werden in [5] ($v(t) = 0$ gesetzt) und in [2] ($u(t) = 0$ gesetzt) behandelt. Diese Ansätze, welche die Lösungsmenge einschränken, sind willkürlich und nicht geometrisch motiviert. Es entstehen bis zu vier Lösungskurven, von denen eine als geeignet herausgefiltert werden kann. Die Ansätze haben folgende Nachteile: Bei Farouki [5] werden ebene Daten nicht durch ebene Kurven interpoliert, bei Eriksson [2] können die Lösungskurven nicht explizit angegeben werden.

Fordert man C^1 -Interpolation und stellt keine Forderungen an die Polynome $u(t), v(t), p(t)$ und $q(t)$, so bleiben für den Entwurf noch drei freie Parameter zur Bestimmung der Lage der beiden Bézierpunkte \underline{b}_2 und \underline{b}_3 . Diese Parameter müssen gewisse Ungleichungen erfüllen, damit eine Lösung existiert. Da die Gleichungen für die Punkte in Abhängigkeit der freien Parameter sehr kompliziert sind, können zusätzliche Interpolationsbedingungen, wie z.B. vorgegebene Krümmungen im

Anfangs- und Endpunkt, nur näherungsweise berechnet werden (siehe [10]). Abbildung 2 zeigt mögliche Lagen der freien Bézierpunkte. Die durchgezogene schwarz eingezeichnete Kurve ist die C^1 -Kubik.

2.4. Bewertung

Für die konkrete Aufgabenstellung der Berechnung gleichabständiger Knoten ist vom Einsatz von ph-Kurven abzuraten. Der Zeitaufwand für die Interpolation einer vorgegebenen Kurve durch eine oder mehrere ph-Kurven ist zu hoch und daher kann keine Verbesserung der Performance durch Benutzung von ph-Kurven erwartet werden.

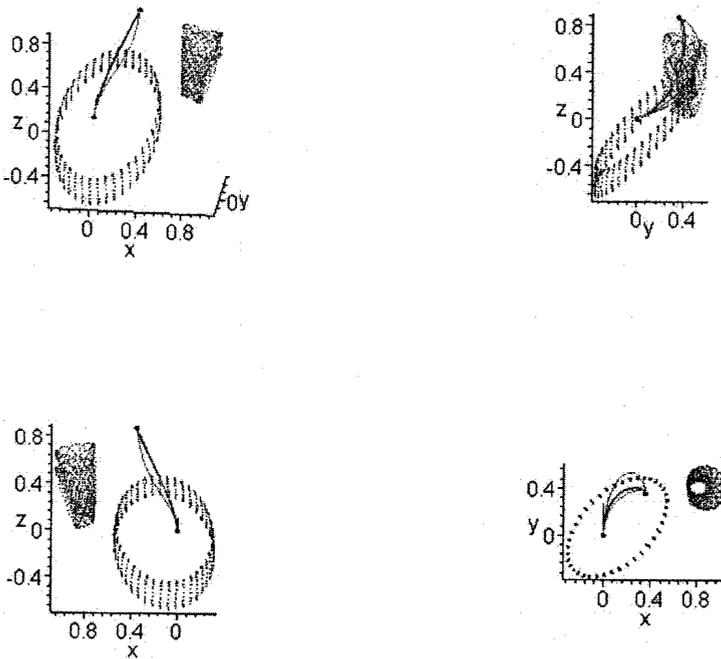


Abbildung 2: ph-Quintiken mit C^1 -Interpolation

3. B-Spline Kurvenentwurf unter Berücksichtigung geometrischer Nebenbedingungen

3.1. Aufgabenstellung und Lösungsansatz

Eine im Straßen- und Gleisbau oft gestellte Aufgabe ist die Berechnung des Platzbedarfs eines Fahrzeugs beim Durchfahren eines Straßenabschnitts oder einer Gleisstrecke. Im Rahmen von [6] ist eine objektorientierte Klassenbibliothek

zur Berechnung des Platzbedarfs von Schienenfahrzeugen entworfen worden. Dazu mussten geeignete mathematische Methoden zur rechnergerechten Darstellung und Berechnung der Gleisführung, der Fahrzeugposition und des Platzbedarfs des Fahrzeugs beim Durchfahren der Strecke entwickelt bzw. angewendet werden. Für die Gleisführung wurde die Gleisachse als B-Spline Kurve beschrieben. Diese Kurve liefert alle Informationen für die das Gleisbett beschreibende Regelfläche. Die Regelfläche und damit auch die Führungskurven liegen nicht in B-Spline Form vor, denn im Allgemeinen sind Parallelkurven zu B-Spline Kurven keine B-Spline Kurven. Mit der vorgeschlagenen Beschreibung ist es jedoch möglich, an einer beliebigen Position alle benötigten Informationen schnell und exakt zu berechnen. Eine Interpolation an Zwischenstellen ist damit nicht mehr nötig. Der Platzbedarf eines Fahrzeuges kann dann berechnet werden, indem das Fahrzeug die Schiene entlanggeschoben und die Hülle über alle Fahrzeugquerschnitte gebildet wird.

3.2. Regelfläche durch Gleisachse und Führungskurven

Die Eingangsdaten über die Gleise sind gegeben durch die $n + 1$ Stationswerte p_j ($j = 0 \dots n$) und Informationen pro Stationswert. Die Stationswerte geben die Bogenlänge der Gleisachse bezogen auf den Anfangspunkt an. An jeder Station sind zusätzlich die vorzeichenbehafteten Krümmungen der (in die Zeichenebene projizierten) Gleisachse gegeben.

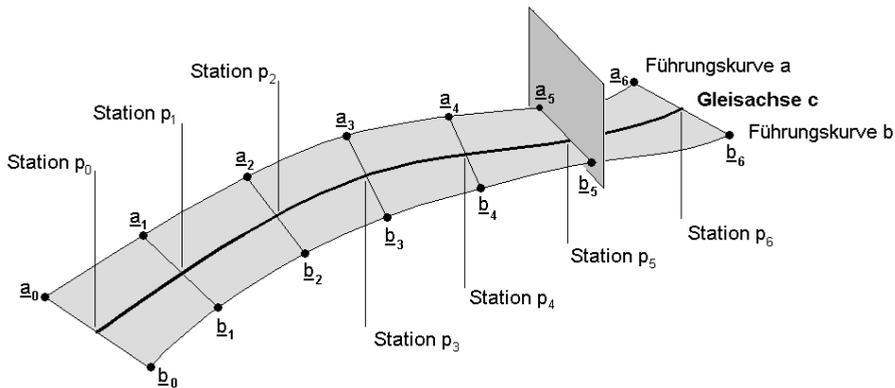


Abbildung 3: Informationen über den Gleisverlauf

Die jeder Station zugeordneten Punkte a_i , b_i sind formal durch Schnitt der beiden Führungskurven mit einer vertikalen Ebene senkrecht zur Gleisachse an dieser Station entstanden und geben die Querneigung an.

Die Gleisachse c und die beiden Führungskurven a und b (Parallelkurven zur Gleisachse) liegen auf einer Regelfläche Φ mit c als Leitkurve und Erzeugenden in Richtung der Querneigung.

Parameterdarstellung der Regelfläche:

$$\varphi \dots \underline{w}(t, v) = \underline{x}(t) + v \cdot \underline{e}(t), \quad t \in [p_0, p_n], \quad v \in [-d, d]$$

$$\underline{e}(p_j) = \underline{n}_j, \quad \underline{n}_j = \frac{\underline{b}_j - \underline{a}_j}{\|\underline{b}_j - \underline{a}_j\|}, \quad d = \frac{1}{2} \|\underline{b}_j - \underline{a}_j\|, \quad j = 0, \dots, n$$

Beschreibung der Gleisachse und der Führungskurven:

$$c \dots \underline{x}(t) = \underline{w}(t, 0), \quad a \dots \underline{y}(t) = \underline{w}(t, -d) = \underline{x}(t) - d \cdot \underline{e}(t),$$

$$b \dots \underline{x}(t) = \underline{w}(t, d) + d \cdot \underline{e}(t).$$

Wenn als Regelerzeugenden in einem beliebigen Punkt der Leitkurve ihre Hauptnormalenvektoren verwendet werden, bestimmt die Leitlinie als räumliche Kurve die gesamte Regelfläche.

Die Stationswerte, die Bogenlängen darstellen, werden als Parameterwerte für die Kurven-interpolation verwendet.

Bogenlängenparametrisierung:

Für eine bogenlängenparametrisierte Kurve gilt speziell:

$\underline{x}(s)$, $0 \leq s \leq l$ ist die Parameterdarstellung der Kurve. Die Kurve hat die Länge l und zum Parameterwert s erhält man den Punkt auf der Kurve, dessen Abstand vom Anfangspunkt, gemessen auf der Kurve, gerade s beträgt.

$\underline{x}'(s)$ ist der Tangenteneinheitsvektor im Kurvenpunkt $\underline{x}(s)$.

$\underline{x}''(s) = \kappa \underline{n}$. Der Vektor der zweiten Ableitung ist senkrecht zur Tangente, seine Länge ist die Krümmung der Kurve in diesem Punkt und liegt in der Schmiegeebene.

Wenn man auf diese Art und Weise die geometrischen Informationen als Ableitungsinformationen „rückinterpretiert“, lässt sich für die Kurve „Gleisachse“ ein Interpolationsverfahren mit gegebenen Punkten, ersten und zweiten Ableitungen entwickeln. Die Tangenteneinheitsvektoren \underline{t}_j an die Kurven a , b und c in den Punkten \underline{a}_j , \underline{b}_j und \underline{p}_j stehen senkrecht zur Querneigung der Gleise. Die Tangentenrichtungen sind jedoch nicht eindeutig bestimmt, in [6] wurde ein Verfahren zu ihrer Bestimmung entwickelt.

Die Interpolationskurve wird als „quasibogenlängen-parametrisiert“ bezeichnet, da nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Interpolationskurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

3.3. Ein Interpolationsverfahren zur Berechnung quasibogenlängen-parametrisierter kubischer B-Spline Kurven

Bedingungen, die an die B-Spline Kurve gestellt werden ($j = 0, \dots, n$):

- $p_j = \underline{x}(p_j)$, \underline{p}_0 ist Anfangspunkt der Kurve, \underline{p}_n der Endpunkt der Kurve.
- Die Kurve soll im Punkt \underline{p}_j den Tangenteneinheitsvektor \underline{p}_j haben.
- Die Kurve soll im Punkt \underline{p}_j die Krümmung κ_j haben.
- Die Ordnung der B-Spline Kurve soll möglichst niedrig bleiben.

- Die Segmentübergänge sollen mindestens G^2 -stetig sein.
- Die Kurve soll näherungsweise nach der Bogenlänge parametrisiert sein!

Wir wählen die niedrigstmögliche Ordnung 4 und setzen einfache innere Knoten. Die Kurve besteht aus $N - 2$ Segmenten und der Übergang an den Segmentgrenzen ist C^2 -stetig.

Bemerkung 3.1. Die B-Spline Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=0}^N N_{i,4}(t) \underline{d}_i, \quad t \in [t_0, t_{N+1}], \quad T = [t_0 \dots t_{N+4}]$$

beginnt im Punkt \underline{d}_0 und endet im Punkt \underline{d}_N , wenn 4-fache Knoten am Rand gesetzt werden.

Ein **Interpolationsverfahren für kubische Kurven** aus [8] wird folgendermaßen erweitert:

$$\text{Interpolation der Punkte: } \underline{p}_j = \underline{x}(p_j) = \sum_{i=0}^N N_{i,4}(p_j) \underline{d}_i, \quad j = 0, \dots, n.$$

$$\text{Interpolation der Ableitungen: } \underline{t}_j = \underline{\dot{x}}(p_j) = 3 \sum_{i=0}^{N-1} N_{i,3}(p_j) \frac{\underline{d}_{i+1} - \underline{d}_i}{t_{i+4} - t_{i+1}}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Forderung an die zweiten Ableitungen:

$$\kappa_j \underline{n}_j = \underline{\ddot{x}}(p_j) = 6 \sum_{i=0}^{N-2} N_{i,2}(p_j) \left[\frac{\underline{d}_{i+2}}{t_{i+5} - t_{i+2}} - \frac{\underline{d}_{i+1}}{t_{i+5} + t_{i+4} - t_{i+2} - t_{i+1}} + \frac{\underline{d}_i}{t_{i+4} - t_{i+1}} \right], \quad j = 0, \dots, n.$$

Dies sind $3(n + 1)$ Gleichungen für $3(n + 1)$ Steuerpunkte.

Für den Knotenvektor gilt: Die gesuchte Kurve hat $3(n + 1)$ Steuerpunkte $\Rightarrow N = 3n + 2$.

Die Anzahl der Trägerwerte im Trägervektor T ist $N + 5 = 3n + 7$.

Aus der Anfangs- und Endpunktinterpolation folgt $t_0 = \dots = t_3 = p_0$ und $t_{N+1} = \dots = t_{N+4} = p_n$. Die Parameter p_j werden als Knoten genommen. Zusätzlich werden zwischen zwei benachbarten Parametern p_j und p_{j+1} je zwei weitere Knoten (äquidistant) eingefügt. Damit ergibt sich ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Steuerpunkte.

3.4. Zusammenfassung und Bewertung

Die Gleisführung wird in einer geschlossenen mathematischen Form unter Berücksichtigung aller geometrischen Eingangsdaten angegeben. Das Gleichsetzen der Hauptnormalen der Kurve an den Interpolationspunkten mit der Querneigung der Gleise verspricht einen schönen Kurvenverlauf bezüglich der Windung der Kurve. Eine gute Approximation der Bogenlänge ist zu erwarten. Wenn sich zeigen lässt,

dass der Parameter der Interpolationskurve bis auf einen gewissen Fehler die Bogenlänge der Kurve darstellt, können Auswertungen an beliebigen Stationen einfach erfolgen, indem die gewünschte Länge als Parameter eingesetzt wird. Offen ist, ob man durch eine Änderung der Knoten zwischen den Stationen noch näher an die Bogenlängenparametrisierung herankommt. Die Ergebnisse von [8] könnten dazu auf ein globales Verfahren erweitert werden.

4. Danksagung

Die vorgestellten Projekte wurden als Diplomarbeiten jeweils in Firmen realisiert. Dank geht im Falle von Regina Schikora an die Firma T-Systems IT Services GmbH, Leinfelden-Echterdingen, die Arbeit von Andrea Frei wurde ermöglicht durch die Firma RIB, Stuttgart.

Referenzen

- [1] Dietz, R., Hoschek, J. und B. Jüttler: An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and other quadrics, CAGD, 10 (1993), 211-229
- [2] Eriksson, M.: Hermite interpolation with spatial Pythagorean hodograph curves. MasterThesis, TU Darmstadt/KTH Stockholm 1999
- [3] Farin, G.: Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design 2. Auflage, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1994
- [4] Farouki, R.T. und T. Sakkalis: Pythagorean hodographs, IBM J. Res. and Devel., 34 (1990), 736-752
- [5] Farouki, R.T. und T. Sakkalis: Pythagorean-hodograph space curves. Advances in Computational Mathematics, 2 (1994), 41-66
- [6] Frei, A.: Berechnung des Platzbedarfs von Schienenfahrzeugen, Diplomarbeit im WS 2001/02, FH Stuttgart - HfT
- [7] Jüttler, B. und C. Mäurer: Cubic Pythagorens hodograph spline curves and applications to sweep surface modeling, CAD 31 (1999), 73-83
- [8] Juhasz, I. and M. Hoffmann: Constrained shape modification of cubic B-Spline curves by means of knots, CAD, to appear
- [9] Piegel, L. and W. Tiller: The NURBS Book 2nd Edition, Springer 1997
- [10] Schikora, R.: Ph-Kurven, Diplomarbeit im WS 2001/02, FH Stuttgart - HfT

Postal address

Susanne Harms

Department of Surveying, Computer Science and Mathematik

Stuttgart University of Applied Sciences

24, Schellingstraße., D-70174 Stuttgart

Germany